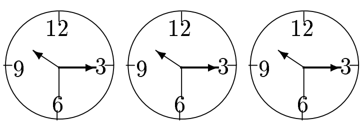
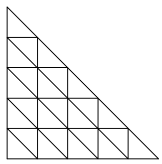
۱) سه ساعت با صفحه‌ی دوار به‌نام‌های A، B، و C داریم که هر سه ساعتِ ″۳۰ : ′۱۵ : ۱۰ را نشان می‌دهند (مانند شکل مقابل). در ساعت A، ثانیه‌شمار تکان نمی‌خورد ولی صفحه (مستقل از عقربه‌ها) و ساعت‌شمار و دقیقه‌شمار طوری حرکت می‌کنند که ساعت هر لحظه زمان درست را نشان می‌دهد.



در ساعت B، دقیقه‌شمار تکان نمی‌خورد، ولی صفحه (مستقل از عقربه‌ها) و ساعت‌شمار و ثانیه‌شمار طوری حرکت می‌کنند که ساعت هر لحظه زمان درست را نشان می‌دهد. در ساعت C، ساعت‌شمار تکان نمی‌خورد، ولی صفحه (مستقل از عقربه‌ها) و دقیقه‌شمار و ثانیه‌شمار طوری حرکت می‌کنند که ساعت هر لحظه زمان درست را نشان می‌دهد. فرض کنید ۵۰ ساعت از وضعیت داده شده گذشته است. در این مدت، چند بار وضعیت این سه ساعت کاملاً مشابه است (یعنی صفحه و ساعت‌شمار و دقیقه‌شمار و ثانیه‌شمار در هر سه ساعت در یک وضعیت قرار دارند)؟ حالت اولیه را نیز یک وضعیت مشابه به‌حساب آورید.

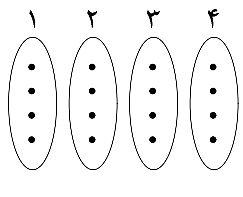
الف) ۱ | ب) ۳ | ج) ۵ | د) ۷ | ه) ۹

۲) در شکل مقابل به دل‌خواه در یکی از خانه‌های مثلثی شکل یک مهره قرار می‌دهیم. در هر حرکت می‌توان این مهره را از خانه‌ی فعلی آن برداشت و پس از طی یک مسیر در یک خانه‌ی جدید گذاشت. این مسیر باید طوری باشد که دقیقاً یک پاره‌خط افقی، یک پاره‌خط عمودی و یک پاره‌خط مورب را قطع کند. این مهره در هر خانه‌ای که قرار بگیرد آن را سیاه می‌کند. توجه کنید که این مهره خانه‌هایی را که در طول مسیر از آن‌ها عبور می‌کند سیاه نمی‌کند. اگر شکل در ابتدا کاملاً سفید باشد، پس از ۲۰ بار حرکت، حداکثر چند خانه را می‌توان سیاه کرد؟



الف) ۵ | ب) ۶ | ج) ۷ | د) ۸ | ه) ۹

۳) می‌خواهیم هر نقطه موجود در دسته‌ی i در شکل مقابل را با یک پاره‌خط به دقیقاً یک نقطه در دسته‌ی $i+1$ وصل کنیم ($i \leq 3$) به‌طوری‌که هیچ دو نقطه‌ای از دسته‌ی iام به یک نقطه از دسته‌ی $i+1$ام وصل نباشند. هم‌چنین می‌خواهیم هر نقطه موجود در دسته‌ی ۴ را با یک پاره‌خط به دقیقاً یک نقطه در دسته‌ی ۱ وصل کنیم به‌طوری‌که هیچ دو نقطه‌ای از دسته‌ی ۴ به یک نقطه از دسته‌ی اول وصل نباشند. به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد؟



الف) $4^3 \times 2^4 \times 3^4$ | ب) $4^4 \times 2^4 \times 3^4$ | ج) $4^3 \times 2^3 \times 3^5$ | د) $4^3 \times 2^5 \times 3^3$ | ه) $4^4 \times 2^3 \times 3^3$

۴) جای‌گشت ۱۲۳۴۵۶ را در نظر بگیرید. در یک حرکت می‌توانیم جای دو عدد i و j را با هم عوض کنیم اگر $2 \geq |i-j|$. پس از انجام چند حرکت به جای‌گشت $\pi = p_1p_2p_3p_4p_5p_6$ می‌رسیم. π کدام‌یک از گزینه‌های زیر می‌تواند باشد؟

الف) ۶۵۴۳۲۱ | ب) ۲۱۳۴۵۶ | ج) ۴۳۱۲۶۵

د) ۳۲۴۶۱۵ | ه) تمام گزینه‌های فوق می‌تواند باشد

۵) سه دستور A، B و C داده شده‌اند که هرکدام به‌عنوان ورودی زوج مرتب (x,y) را می‌گیرد و خروجی زیر را تولید می‌کند:

- دستور A خروجی با مقدار $(x+۳,y)$ را تولید می‌کند.
- دستور B خروجی با مقدار $(x,y-۲)$ را تولید می‌کند.
- دستور C خروجی با مقدار (y,x) را تولید می‌کند.

به تعدادی دستور پشت سر هم یک «برنامه» می‌گوییم. هر برنامه به عنوان ورودی زوج مرتب (x,y) را می‌گیرد و خروجی آن به صورت زیر تعیین می‌شود: دستور اول بر روی ورودی اجرا می‌شود، سپس دستور دوم خروجی دستور اول را به‌عنوان ورودی دریافت می‌کند و اجرا می‌شود، ...و دستور $i+۱$ام خروجی دستور iام را به‌عنوان ورودی دریافت می‌کند و اجرا می‌شود. خروجی برنامه، خروجی دستور آخر است. به‌طور مثال برنامه‌ی AAC را در نظر بگیرید که ورودی آن $(۱,۲)$ است. خروجی این برنامه $(۲,۷)$ خواهد بود (دستورها از چپ‌به‌راست اجرا می‌شوند).
فرض کنید یک برنامه داریم که ورودی آن $(۲,۱)$ و خروجی آن $(۸,۵)$ است. حداقل تعداد دستورهای این برنامه چند تاست؟

الف) ۵ ب) ۶ ج) ۷ د) ۸ هـ) ۹

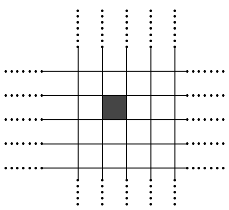
۶) همان سؤال قبل، با این تفاوت که خروجی دستورهای A ، B و C به صورت زیر است:

- دستور A خروجی $(x+۱,y)$ را تولید می‌کند.
- دستور B خروجی $(x,y+۱)$ را تولید می‌کند.
- دستور C خروجی (y,x) را تولید می‌کند.

تعداد برنامه‌هایی را پیدا کنید که از دستور C دقیقاً یک بار استفاده کرده باشد و به‌ازای ورودی $(۰,۰)$ خروجی $(۲,۲)$ را تولید کند.

الف) ۶ ب) ۱۸ ج) ۲۴ د) ۳۰ هـ) ۳۲

۷) یک جدول ۲ بعدی نامتناهی را درنظر بگیرید که در ابتدا تمام خانه‌های آن سفید است. در مرحله‌ی اول یکی از خانه‌های آن را به دل‌خواه سیاه می‌کنیم (شکل مقابل). از مرحله دوم به بعد، در هر مرحله کلیه‌ی خانه‌هایی که ۱، ۲ و ۳ همسایه سیاه دارند را مشخص می‌کنیم و سپس همه‌ی آن‌ها را سیاه و بقیه‌ی خانه‌ها را سفید می‌کنیم. (دو خانه مجاورند اگر ضلع مشترکی داشته باشد.)



بزرگ‌ترین kای را پیدا کنید که خانه‌ای که در مرحله اول سیاه شده بود در مرحله‌ی kام هم سیاه شود.

الف) ۱ ب) ۷ ج) ۸
د) ۱۶ هـ) k هر قدر می‌تواند بزرگ باشد.

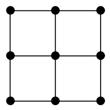
۸) تعداد زیرمجموعه‌های $\{۱,۲,\ldots,۱۰\}$ که مجموع اعضای آن بر ۸ بخش‌پذیر چندتاست؟

الف) ۱۲۵ ب) ۱۲۶ ج) ۱۲۷ د) ۱۲۸ هـ) ۱۲۹

۹) k عدد رخ را در یک صفحه‌ی شطرنجی ۱۰×۱۰ طوری قرار داده‌ایم که تمام صفحه را تهدید کنند. یک رخ در خانه‌ی (x,y)، همه‌ی خانه‌های سطر x و ستون y را تهدید می‌کند. هم‌چنین می‌خواهیم که هر رخ دقیقاً توسط ۴ رخ دیگر تهدید شود. حداقل k چند است؟

الف) ۹ ب) ۱۰ ج) ۱۳ د) ۱۶ هـ) ۲۴

۱۰) نقشه‌ی یک استان در شکل مقابل نشان داده شده است که در آن هر نقطه یک شهر و هر خط یک جاده بین دو شهر است. فاصله‌ی دو شهر A و B برابر است با حداقل تعداد جاده‌هایی که باید طی کنیم تا از A به B برسیم. یک دزد در یکی از این شهرها که از قبل مشخص نیست مخفی شده است. برای پیدا کردن این دزد مجاز هستیم به‌صورت زیر عمل کنیم.



- در ابتدای هر روز یکی از شهرها به‌نام A را انتخاب و آن را جست‌وجو می‌کنیم. اگر دزد در آن شهر بود که او را دست‌گیر می‌کنیم. ولی اگر نبود به‌کمک دستگاهی فاصله‌ی شهر A تا شهری که دزد در آن قرار دارد را پیدا می‌کنیم.
- در انتهای هر روز دزد از شهری که در آن قرار دارد به یکی از شهرهای مجاور آن می‌رود (دو شهر را مجاور گوییم اگر با یک جاده به هم متصل باشند). دقت کنید که دزد حتماً جای خود را عوض می‌کند.

حداقل به چند روز نیاز داریم تا مطمئن باشیم که دزد را دستگیر می‌کنیم؟

الف) ۶   ب) ۷   ج) ۸
د) ۹   هـ) با گذشت هر چند روز نمی‌توان مطمئن بود که دزد را پیدا کرده‌ایم.

۱۱) همان سؤال قبل اگر نقشه‌ی استان به صورت مقابل باشد.

الف) ۴   ب) ۵   ج) ۶
د) ۷   هـ) با گذشت هر چند روز نمی‌توان مطمئن بود که دزد را پیدا کرده‌ایم.

۱۲) در خانه‌ی $(0,0)$ جدول مختصات عدد ۱ را می نویسیم. فرض کنید در ابتدای هر مرحله در خانه‌ی (x,y) عدد i نوشته شده است. در آن مرحله i را پاک می‌کنیم و یکی از چهار حرکت زیر را انجام می‌دهیم:

- در خانه‌ی $(x+1,y)$ عدد $4i$ را می‌نویسیم،
- در خانه‌ی $(x,y+1)$ عدد $4i+1$ را می‌نویسیم،
- در خانه‌ی $(x-1,y)$ عدد $4i+2$ را می‌نویسیم، یا
- در خانه‌ی $(x,y-1)$ عدد $4i+3$ را می‌نویسیم.

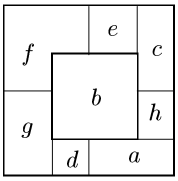
پس از انجام چند مرحله متوجه می‌شویم در خانه $(1,1)$ عدد K نوشته شده است. K کدام گزینه می‌تواند باشد؟

الف) ۶۰۳۹   ب) ۱۰۸۲   ج) ۱۳۴۷   د) ۵۱۳۲   هـ) ۵۹۲۱

۱۳) کامران یک دستگاه عددشمار ساخته است که ۷ لامپ دارد. معنی روشن یا خاموش بودن لامپ iام به‌ترتیب ۱ یا ۰ بودن رقم iام یک عدد ۷ رقمی در مبنای ۲ است. مثلاً اگر فقط لامپ سوم روشن باشد دستگاه عدد ۸ را نمایش می‌دهد. در ابتدا همه‌ی لامپ‌ها خاموش هستند. این دستگاه دکمه‌ای دارد که با فشار آن عدد دستگاه یک واحد افزایش می‌یابد. کامران با ۶۴ بار فشار دادن دکمه عدد اولیه‌ی صفر را به ۶۴ تبدیل می‌کند. اگر d_i برابر با تعداد دفعاتی باشد که لامپ iام تغییر وضعیت داده است، $\sum_{i=1}^{7} d_i$ برابر چه‌مقدار است؟

الف) ۱۲۹   ب) ۱۲۷   ج) ۶۱   د) ۶۵   هـ) ۶۴

۱۴) ۸ مربع هم‌اندازه با رنگ‌های a، b، ... و h را یکی پس از دیگری در یک صفحه چیده‌ایم (هر مربع بر روی مربع‌های قبلی قرار می‌گیرد) و شکل مقابل حاصل شده است. اگر مربع با رنگ a را A بنامیم، و مربع با رنگ b را B و ...، به چه ترتیبی این مربع‌ها را چیده‌ایم؟



الف) C،H،B،A،G،D،E و F
ب) G،D،A،H،C،E،F و B
ج) F،G،D،A،H،C،E و B
د) F،E،C،H،A،D،G و B
ه) D،G،H،A،E،C،F و B

۱۵) همه‌ی رشته‌های تولید شده از حروف a و b را به‌ترتیبِ طول رشته و در صورت مساوی بودن طول‌ها به ترتیب الفبایی مرتب می‌کنیم. مثلاً هشت رشته‌ی اول عبارتند از: $a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab$. رشته‌ی ۱۳۸۱ ام کدام است؟

الف) $ababbaabba$
ب) $bababbbab$
ج) $ababbaabab$
د) $babaabbaab$
ه) $ababaaaba$

۱۶) ۲۰ عدد کاسه داریم که در هر یک می‌توانیم یک پنج تومانی قرار دهیم یا آن را خالی بگذاریم. هم‌چنین ۱۰ کاسه‌ی دیگر داریم که در هر یک می‌توانیم یک ۲ تومانی قرار دهیم یا آن را خالی بگذاریم. به چند طریق می‌توانیم در این کاسه‌ها، سکه‌هایی ۵ تومانی و ۲ تومانی قرار دهیم تا مجموع سکه‌های موجود در کاسه‌ها ۸۱ تومان شود؟

الف) $\binom{۲۰}{۱۵}+\binom{۲۰}{۱۳}+\binom{۱۰}{۳}+\binom{۱۰}{۸}$
ب) $\binom{۲۰}{۱۵}\times\binom{۲۰}{۱۳}\times\binom{۱۰}{۳}\times\binom{۱۰}{۸}$
ج) $\frac{۱۵!+۸\times۱۳!\times۱۴}{۲۰!}$
د) $\binom{۱۳}{۸}+\binom{۱۵}{۳}$
ه) $\binom{۲۰}{۱۵}\times\binom{۱۰}{۳}+\binom{۲۰}{۱۳}\times\binom{۱۰}{۸}$

۱۷) منظور از یک زیردنباله تعدادی عدد پشت سر هم از یک دنباله است. مثلاً $(۲, ۳, ۴)$ زیر دنباله‌ی $(۱, ۲, ۳, ۴, ۵)$ هست ولی $(۱, ۴, ۵)$ زیر دنباله‌ی آن نیست. هم‌چنین یک زیر دنباله مضرب پنج است اگر جمع اعضای آن مضرب پنج باشد. مثلاً (۵) یا $(۱, ۲, ۳, ۴)$ زیر دنباله‌های مضرب ۵ از $(۱, ۲, ۳, ۴, ۵)$ هستند ولی $(۱, ۲, ۳)$ مضرب ۵ نیست. تعداد زیردنباله‌های ناتهی مضرب ۵ دنباله‌ی $(۲, ۰, ۰, ۳, ۰, ۱, ۳, ۱, ۱, ۳, ۸, ۱, ۱, ۱, ۱, ۱)$ چه‌قدر است؟

الف) ۴
ب) ۱۸
ج) ۲۲
د) ۲۴
ه) ۲۶

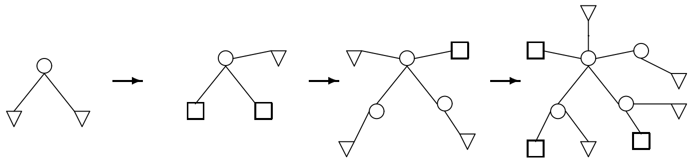
۱۸) یک سالن با ۱۰۳ ردیف صندلی داریم که در هر ۵ ردیف متوالی آن در مجموع ۲۰۰ نفر نشسته‌اند. در این سالن حداقل و حداکثر چند نفر نشسته‌اند؟

الف) ۴۲۰۰/۴۰۰۰
ب) ۴۲۰۰/۴۱۲۰
ج) ۴۱۲۰/۴۰۰۰
د) ۴۱۲۰/۴۱۲۰
ه) چنین حالتی ممکن نیست.

۱۹) اگر f یک تابع از اعداد صحیح و مثبت به اعداد صحیح و مثبت باشد که $f(n+۱) > f(n)$، و $f(f(n)) = ۳n$. مقدار $f(۹)$ چه‌قدر است؟

الف) ۹
ب) ۱۰
ج) ۱۲
د) ۱۶
ه) ۱۸

۲۰) طبق قواعد زیر هر شکل از شکل قبل به این صورت ساخته می‌شود:

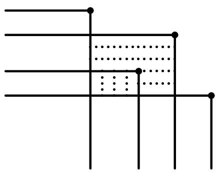


* هر مربع تبدیل به دایره می‌شود.
* هر مثلث تبدیل به مربع می‌شود.
* در پایان، به ازاء هر دایره (حتی دایره‌های جدید)، یک مثلث جدید می‌کشیم و به آن دایره وصل می‌کنیم.

در بالا چهار شکل اول این سری را نشان داده‌ایم. شکل یازدهم چند تا مثلث دارد؟

الف) ۸۹ ب) ۹۰ ج) ۱۲۱ د) ۱۲۳ هـ) ۱۲۵

۲۱) یک ریاضی‌دان در دفتر کار خود یک تخته سیاه خیلی بزرگ دارد. روزی پسرش از وی خواست تا با او بازی کند. ریاضی‌دان که به بازی‌های کودکانه چندان آشنایی نداشت، به فرزندش پیشنهاد کرد بازی «رولینگ» را انجام دهند. ریاضی‌دان به پسرش گفت که در این بازی، پسر با گچ یک نقطه روی تخته بگذارد و سپس ریاضی‌دان از آن نقطه دو نیم‌خط رسم کرد: یک نیم‌خط افقی از نقطه به سمت چپ و یک نیم‌خط عمودی از نقطه به پایین.



پسر که از این بازی کلافه شده بود از پدرش خواست تا یک بازی دیگر مثل «کوئیدیچ» را بازی کنند، ولی ریاضی‌دان برای آن که پسرش راضی شود به او گفت: «اگر بتوانی با انتخاب ۷ نقطه بیشترین ناحیه‌های بسته را ایجاد کنی تو را به تماشای مسابقه‌ی کوئیدیچ خواهم برد». یک ناحیه‌ی بسته، ناحیه‌ای از تخته است که دور تا دور آن به وسیله‌ی نیم‌خط‌ها بسته شده باشد. مثلا در شکل مقابل با انتخاب ۴ نقطه، دو ناحیه‌ی بسته ایجاد کرده‌ایم که با هاشور مشخص شده اند.
پسر با انتخاب ۷ نقطه حداکثر چند ناحیه‌ی بسته می‌تواند ایجاد کند؟

الف) ۱۰ ب) ۱۲ ج) ۱۵ د) ۱۸ هـ) ۲۰

۲۲) یک قورباغه روی نقطه‌ی صفر محور مختصات نشسته است. این قورباغه می‌تواند به‌سمت جلو بجهد، ولی طول پرش آن در iامین جهش به دل‌خواه خودش i یا $i + 1$ واحد است. او پس از چند جهش می‌تواند به نقطه‌ی ۱۳۸۱ برسد؟ و چند جهش دیگر لازم است تا از آن‌جا به نقطه‌ی ۲۰۰۳ برسد؟

الف) ۵۲ و ۱۱ ب) ۵۲ و ۱۲ ج) ۵۲، نمی‌تواند برسد
د) ۳۷ و ۹ هـ) به هیچ‌کدام نمی‌تواند برسد.

۲۳) یک بازی دو نفره بر روی عبارت $(\underbrace{?}_{1} \underbrace{* (?}_{2} \underbrace{* ?}_{1}))$ انجام می‌شود. در این عبارت به‌جای هر علامت ? باید یکی از اعداد ۰، ۱ یا ۲ (به‌صورت غیر تکراری) و به‌جای $*$ یکی از عملگرهای $\times$ (ضرب) یا $+$ (جمع) قرار گیرد. بازی به‌این صورت است: نفر اول یکی از اعداد را برای اولین ?، سپس نفر دوم یک عملگر و یک عدد برای ? $*$ بعدی، در مرحله‌ی آخر نفر اول همین کار را برای ? $*$ بعدی انجام می‌دهد. کدام‌یک از گزینه‌های زیر درست است؟

الف) نفر اول می‌تواند طوری بازی کند که عدد حاصل زوج شود.
ب) نفر دوم می‌تواند طوری بازی کند که عدد حاصل زوج شود.
ج) نفر اول می‌تواند طوری بازی کند که عدد حاصل فرد شود.
د) نفر دوم می‌تواند طوری بازی کند که عدد حاصل فرد شود.
هـ) هر دو گزینه‌های الف و ب درست‌اند.

۲۴) ۱۰ سکه دور دایره‌ای چیده شده‌اند که یک درمیان شیر (H) و خط (T) هستند. در هر مرحله می‌توانیم هر سه‌تا سکه پشت سر هم را که HTH یا THT باشند انتخاب کنیم و هر سه را برگردانیم. با تکرار این کار، حداکثر چه تعداد H می‌توانیم داشته باشیم؟

الف) ۵ ب) ٦ ج) ۷ د) ۸ هـ) ۹

۲۵) عبارت بدون پرانتز $a - b/c * d + e$ را درنظر بگیرید. می‌دانیم که مقدار این عبارت برابر است با $x = ((a - ((b/c) * d)) + e)$. به‌چند طریق می‌توان این عبارت را پرانتزگذاری کرد که به‌ازای همه‌ی مقادیر a تا e، حاصل آن همان مقدار x باشد؟ در عبارت پرانتزگذاری‌شده به‌ازای هر عملگر حداکثر یک جفت پرانتز می‌توان گذاشت، مثلاً $a + ((b/c)) * d + e$ حاوی یک جفت پرانتز اضافه است.

الف) ١٦ ب) ۳۲ ج) ۱۸ د) ۲۴ هـ) ۸

۲٦) مجموعه‌ی S «دوستانه» است اگر برای هر $x \in S$ حداقل یکی از $x + ۱$ و $x - ۱$ هم در S باشد. مثلاً $\{۱, ۲, ۴۹۹, ۵۰۰\}$ دوستانه است. چه‌تعداد مجموعه‌ی دوستانه با ۵ عضو از اعداد ۱ تا ۱۰۰ داریم؟

الف) ۴٦۵٦ ب) ۹۲۰۸ ج) ۹۲۱٦ د) ۱۰۰۰۰ هـ) ۱۸۳۳٦

۲۷) ۷ تا کره‌ی یک شکل و یک رنگ داریم که که از جنس‌های متفاوت ساخته شده‌اند. می‌دانیم که حداقل ۴ تا از این کره‌ها از یک جنس هستند (به این جنس، «غالب» می‌گوییم.) دو تا کره را برمی‌داریم و به‌هم می‌چسبانیم، اگر از یک جنس باشند جرقه می‌زند، در غیر این صورت اتفاقی نمی‌افتد. با حداقل چند بار چسباندن کره‌ها به‌هم مطمئناً می‌توان یک کره پیدا کرد که از جنس غالب باشد؟

الف) ۳ ب) ۴ ج) ۵ د) ٦ هـ) ۷

۲۸) ترکیب دو دنباله‌ی مرتب A و B به‌ترتیب با اندازه‌های n و m یک دنباله‌ی مرتب به‌اندازه‌ی $n + m$ تولید می‌کند و این کار به‌اندازه‌ی $m + n$ هزینه دارد. (مثلاً اگر $A = (۱, ۲, ۳, ۵)$ و $B = (۴, ٦)$ باشد $C = (۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ٦)$ ترکیب این دو دنباله و هزینه‌ی تولید آن ٦ است.) برای ترکیب سه دنباله، ابتدا دو تای آن‌ها را با هم ترکیب و دنباله‌ی حاصل را با دنباله‌ی سوم ترکیب می‌کنیم. بدیهی است که انتخاب دو دنباله‌ی اول در کل هزینه‌ی ترکیب مؤثر است. حال فرض کنید ۷ دنباله به‌اندازه‌های ۴، ۵، ٦، ۷، ۸، ۸، و ۱۰ داریم. کم‌ترین هزینه‌ی کل برای ترکیب این ۷ دنباله چه‌قدر است؟

الف) ۴۸ ب) ۱۰۵ ج) ۱۳۴ د) ۱۴۴ هـ) ١٦۲

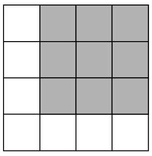
۲۹) در یک جدول، دو خانه را همسایه می‌گوییم اگر در یک نقطه یا در یک ضلع اشتراک داشته‌باشند (بنابراین، هر خانه حداکثر ۸ همسایه دارد). می‌خواهیم در یک جدول ۱۰×۱۰، k خانه را علامت بزنیم به‌طوری‌که هر خانه‌ی علامت نخورده حداقل یک همسایه علامت خورده داشته باشد. k حداقل چه‌قدر است؟

الف) ۱۳ ب) ۱۴ ج) ۱۵ د) ١٦ هـ) ۱۷

۳۰) یک n—ضلعی را «کامل» می‌نامیم اگر به‌ازای هر عدد صحیح i $(۱ \leq i \leq n)$، دقیقاً یک ضلع به طول i داشته باشد و هر دو ضلع مجاور آن بر هم عمود باشند. کم‌ترین عدد n که به‌ازای آن، n—ضلعی کامل وجود دارد چند است؟

الف) ۴ ب) ٦ ج) ۸ د) ۱۲ هـ) ١٦

۳۱) بازی یک نفره‌ی «کوئیدیچ» به شکل زیر انجام می‌شود: یک صفحه‌ی ۴ × ۴ که همه‌ی ۱۶ خانه‌ی آن سفید هستند در اختیار داریم. در هر حرکت، یکی خانه را انتخاب می‌کنیم. با انتخاب هر خانه، رنگ آن خانه و همه‌ی خانه‌هایی که در بالا و سمت راست آن هستند عوض می‌شود (از سفید به سیاه یا از سیاه به سفید تغییر می‌یابد). مثلاً در شکل مقابل با انتخاب خانه‌ی دوم از ردیف سوم، رنگ بعضی از خانه ها سیاه شده است.



می‌خواهیم با k بار انجام این حرکت، صفحه را به صورت شطرنجی در آوریم (یعنی رنگ هیچ دو خانه‌ای که در یک ضلع مشترکند، یکی نباشد). کم‌ترین مقدار k چه‌قدر است؟

الف) ۶ ب) ۷ ج) ۸ د) ۱۵ هـ) ۱۶

۳۲) ۳۰ دانش‌آموز در یک کلاس حضور دارند که همه‌ی آن‌ها افرادی راست‌گو هستند. می‌دانیم یکی از آن‌ها المپیادی است ولی او را نمی‌شناسیم. می‌خواهیم با پرسیدن k سؤال، فرد مزبور را بیابیم. در هر سؤال می‌توانیم یکی از دانش‌آموزان را انتخاب کنیم و به او اسم چند نفر از دانش‌آموزان را بگوییم و از او بپرسیم که آیا فرد المپیادی، یکی از آن چند نفر است یا خیر؟ او هم فقط به این سؤال جواب «بله» یا «خیر» می‌دهد. k حداقل چه‌قدر باشد که با پرسیدن k سؤال همواره مطمئن باشیم می‌توانیم فرد مورد نظر را بشناسیم؟

الف) ۳ ب) ۵ ج) ۷ د) ۱۰ هـ) ۱۵

۳۳) اعداد ۱ تا ۱۰۰۰ را به این صورت در یک سطر می‌نویسیم: ابتدا عدد ۱، سپس بدون فاصله عدد ۱۰۰۰، بعد ۲، سپس ۹۹۹، و .... مثلا ۱۸ رقم ابتدای این سطر به این صورت است: ۱۱۰۰۰۲۹۹۹۳۹۹۸۴۹۹۷۵.
۴۹۰ امین رقم نوشته‌شده در این سطر چند است؟

الف) ۰ یا ۹ ب) ۱ یا ۸ ج) ۲ یا ۷ د) ۳ یا ۶ هـ) ۴ یا ۵

۳۴) یک رشته‌ی دودویی n—رقمی را یک «عدد جهانی» می‌نامیم در صورتی‌که وقتی خودش را با معکوسش جمع بزنیم دو بر یک ایجاد نشود. مثلا فرض کنید $n = ۶$. در این صورت $(۰۱۰۰۰۱)_۲$ یک عدد جهانی است چون معکوس آن $(۱۰۰۰۱۰)_۲$ است و موقع جمع زدن این دو عدد، هیچ دو رقم ۱ روی هم قرار نمی‌گیرند تا موقع جمع زدن دو بر یک به وجود آید. (در واقع دو بر یک، معادل ده بر یک، در جمع اعداد دودویی است و وقتی ایجاد می‌شود که جمع ارقام واقع در یک ستون، بیش‌تر از ۱ شود). تعداد اعداد دودویی جهانی ۱۰ رقمی چه‌قدر است؟

الف) $۲^{۵}$ ب) $۲^{۱۰}$ ج) $۳^{۵}$ د) $۳^{۸}$ هـ) $۴^{۴}$

۳۵) در یک صفحه‌ی شطرنج (۸ × ۸) به‌چند روش می‌توان ۸ رخ در خانه‌های <u>سیاه</u> قرار داد که هیچ دو رخی یک‌دیگر را تهدید نکنند (در یک سطر یا یک ستون نباشند)؟

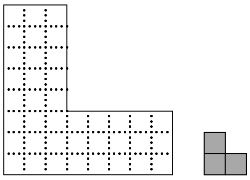
الف) ۸!/۲ ب) ۱۲۰ ج) ۵۷۶ د) ۴۰۹۶ هـ) ۱۴۴۰۰

۳۶) دو تابع A و B به‌صورت زیر بر روی اعداد طبیعی تعریف شده‌اند.

$$A(n) = \begin{cases} 1 & n = 1, \\ B(n+1) - 1 & n > 1 \end{cases} \qquad B(n) = \begin{cases} 1 & n \leq 2, \\ A(n-2) + 2 & n > 2 \end{cases}$$

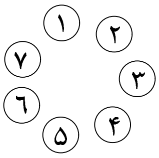
مقدارهای $A(۱۳۸۱)$ و $B(۲۰۰۳)$ چه‌قدرند؟

الف) ۱۳۸۱ و ۲۰۰۳ ب) ۱۳۸۰ و ۲۰۰۲ ج) ۱۳۸۲ و ۲۰۰۳ د) ۱۳۸۲ و ۲۰۰۴ هـ) ۱۳۸۰ و ۲۰۰۳



۳۷) به‌چند طریق می‌توان سالن به شکل مقابل را با موزائیک نشان‌داده‌شده کاملاً پوشاند به‌طوری‌که موزائیک‌ها روی هم قرار نگیرند؟

الف) ۸　　ب) ۱۲　　ج) ۱۴　　د) ۱۶　　ه) ۲۰



۳۸) بهداد مشغول انجام بازی «دامبلدور» است. این بازی به این صورت انجام می‌شود: ۷ سنگ با شماره‌های ۱ تا ۷ به صورت زیر قرار دارند. در حرکت iام بازی، بهداد به‌صورت یک—پا $i - 1$ سنگ را در جهت ساعت‌گرد رد کرده و به‌صورت جفت—پا روی سنگ بعد می‌پرد و می‌ایستد. برای مثال بهداد در شروع بازی روی سنگ ۱ است. او در حرکت اول جفت—پا روی سنگ ۲ می‌پرد. در حرکت دوم یک—پا روی سنگ ۳ پریده و سپس جفت پا روی سنگ ۴ می‌پرد.
در حرکت سوم، یک—پا روی سنگ‌های ۵ و ۶ پریده و سپس جفت—پا روی سنگ ۷ می‌پرد و بالاخره، در حرکت چهارم، به صورت یک—پا روی سنگ‌های ۱، ۲، و ۳ می‌پرد و روی سنگ ۴ به صورت جفت—پا می‌ایستد. آیا می‌توانید مشخص کنید بهداد پس از حرکت ۱۳۸۱ ام روی کدام سنگ خواهد بود؟

الف) ۱　　ب) ۲ یا ۳　　ج) ۴　　د) ۵ یا ۶　　ه) ۷

۳۹) روز دیگر محمد به بازی «اسنیپ» پرداخت. این بازی شبیه بازی دامبلدور است. در این بازی ۱۰ سنگ ۱ تا ۱۰ به‌صورت دایره‌ای شکل قرار گرفته‌اند. محمد روی سنگ ۱ قرار دارد. او در حرکت iام باز هم روی $i - 1$ سنگ به‌صورت یک—پا و سپس روی سنگ بعدی جفت—پا می‌پرد. اما فرق مهم این دو بازی در این است که در این بازی هرگاه محمد به‌صورت جفت—پا روی سنگ ۱ بپرد، جهت پریدنش را عوض می‌کند. مثلاً تصور کنید پس از حرکت سوم او روی سنگ ۷ قرار دارد. او در حرکت چهارم به‌صورت یک—پا به‌ترتیب روی سنگ‌های ۸، ۹ و ۱۰ خواهد پرید و سپس به‌صورت جفت—پا روی سنگ ۱ می‌پرد. حال جهت حرکتش عوض می‌شود و در حرکت پنجم، به‌صورت یک—پا از روی سنگ‌های ۱۰، ۹، ۸، و ۷ خواهد گذشت و به‌صورت جفت—پا روی سنگ ۶ می‌پرد. مشخص کنید پس از حرکت ۲۰۰۳ ام او روی کدام سنگ خواهد بود؟

الف) ۱ یا ۲　　ب) ۳ یا ۴　　ج) ۵ یا ۶　　د) ۷ یا ۸　　ه) ۹ یا ۱۰

۴۰) در یک خانواده‌ی مردسالار مجموعه‌ی «اجداد» یک‌نفر برابر است با پدر او، پدرِ پدر او و .... و مجموعه‌ی «بزرگ‌تر»های یک‌نفر برابر است با اجداد و برادران اجداد او. در روز عید، بزرگ فامیل که هیچ برادر یا بزرگ‌تری ندارد یک سکه به یکی از پسران خود می‌دهد. هر کس که سکه را دریافت کند یا آن‌را برای خود برمی‌دارد و یا آن‌را به یکی از پسرانش یا یکی از بزرگ‌ترهایش می‌بخشد. اگر G نام بزرگ فامیل و P، Q، R، و S نام ۴ نفر از اعضاء آن فامیل باشد که در یک دور بازی مشارکت داشته‌اند، کدام‌یک از ترتیبات دریافت سکه زیر ممکن نیست؟

الف) $G \to P \to R \to Q \to S \to R$
ب) $G \to P \to Q \to R \to S \to P$
ج) $G \to P \to Q \to R \to S \to Q \to P$
د) $G \to P \to R \to Q \to S \to R$
ه) $G \to P \to Q \to R \to S \to Q \to S$

«موفق باشید»