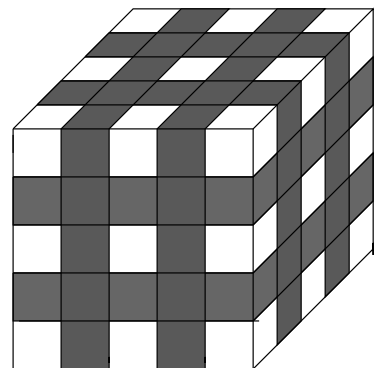


مسئله ۱ ۱۰ نمره

ثابت کنید که برای هر عدد طبیعی n می توان 7^n دایره به شعاع واحد را درون یک دایره به شعاع 3^n جا داد به طوری که هیچ دو دایره ای متقاطع نباشند. (هر دو دایره حداکثر در یک نقطه می توانند با هم اشتراک داشته باشند).

مسئله ۲ ۱۰ نمره

یک مکعب با اضلاع به طول $2n + 1$ از $(2n + 1)^3$ مکعب با اضلاع به طول واحد تشکیل شده است. وجوه خارجی این مکعب را با نوارهای یک در میان رنگ می زنیم. به عنوان مثال در شکل زیر یک مکعب $5 \times 5 \times 5$ به طور مطلوب رنگ آمیزی شده است:



تعداد مکعبهای به ضلع واحد که هیچ یک از وجوه آنها رنگ نشده است را بیابید.

مسئله ۳

نمره ۲۰

سیزده گلوله سفید رنگ در یک ردیف با فاصله مساوی از یکدیگر قرار داده شده‌اند. A و B بازی زیر را با همدیگر انجام می‌دهند:

ابتدا A تعداد k گلوله سفید رنگ را انتخاب کرده، با رنگ آبی رنگ می‌کند. سپس B تعداد k گلوله سفید رنگ را انتخاب کرده، با رنگ قرمز رنگ می‌کند. پس از این کار A گلوله‌های سفیدی را برمی‌دارد که به یک گلوله آبی نزدیکتر باشند تا به یک گلوله آبی. همچنین B گلوله‌های سفیدی را برمی‌دارد که به یک گلوله قرمز نزدیکتر باشند تا به یک گلوله آبی. گلوله سفیدی که نزدیکترین فاصله‌اش با گلوله‌های آبی و قرمز مساوی باشد برداشته نمی‌شود. برنده بازی کسی است که بیشترین تعداد گلوله‌های سفید را بردارد.

اثبات کنید که به‌ازای $k = 1, 2, 6$ می‌تواند در این بازی برنده شود.

در بیان اثبات دقیق بوده و حتی‌الامکان با رسم شکل توضیح دهید.

مسئله ۴

نمره ۱۰

شش نفر با نامهای A, B, C, D, E و F را در نظر بگیرید. از این افراد تعدادی راستگو و تعدادی دروغگو هستند. برای تشخیص افراد دروغگو سؤال‌هایی از این افراد پرسیده‌ایم. بدین صورت که از فرد X پرسیده‌ایم که آیا Y راستگو است و یا دروغگو. این را هم می‌دانیم که راستگو همواره درست جواب می‌دهد ولی دروغگو ممکن است درست یا نادرست جواب دهد. از این سؤالات اطلاعات زیر بدست آمده است:

(۱) A می‌گوید: C دروغگو است.

(۲) B می‌گوید: C راستگو و A دروغگو است.

(۳) C می‌گوید: D راستگو و E دروغگو است.

(۴) D می‌گوید: F راستگو است.

(۵) E می‌گوید: F راستگو و C دروغگو است.

(۶) F می‌گوید: B دروغگو است.

اگر بدانیم که تعداد دروغگوها از دو نفر بیشتر نیست، افراد دروغگو را با ذکر استدلال مشخص کنید.

مسئله ۵

نمره ۲۰

n یک عدد طبیعی دلخواه است. یک ترتیب دلخواه از اعداد ۱ تا n که در آن هر یک از اعداد ۱ تا n دقیقاً یک بار آمده باشد را یک جایگشت از $\{1, 2, \dots, n\}$ می‌نامیم. می‌گوییم جایگشت p_1, p_2, \dots, p_n در دنباله a_1, a_2, \dots, a_k ظاهر شده است اگر اندیسهای $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n \leq k$ وجود داشته باشند به طوری که برای

چهارمین المپیاد ملی کامپیوتر ایران

هر $1 \leq j \leq n$ داشته باشیم $a_{i_j} = p_j$. به عنوان مثال جایگشت $1, 3, 2$ در دنباله $3, 2, 3, 1, 2, 3$ ظاهر شده است.

یک دنباله از اعداد 1 تا n یک **دنباله جالب** نامیده می شود اگر هر جایگشت دلخواهی از $\{1, 2, \dots, n\}$ در این دنباله ظاهر شده باشد.

ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n حداقل یک دنباله جالب به طول $2^n - 1$ وجود دارد.

مسئله ۶ ۱۵ نمره

الگوریتم زیر را در نظر بگیرید. این الگوریتم روی سه آرایه a و b و c عملیاتی را انجام می دهد. عنصر i ام آرایه a را در این الگوریتم با نماد $a[i]$ نشان داده ایم.

(۱) عدد n را از ورودی دریافت کن.

(۲) برای هر $0 \leq i \leq 5$ ، $a[i]$ را مساوی $5 - i$ و $b[i]$ را مساوی باقیمانده تقسیم $i + 3$ بر 6 قرار بده.

(۳) مراحل زیر را n بار تکرار کن:

(۳-۱) برای هر $0 \leq i \leq 5$ قرار بده: $c[i] = a[b[i]]$

(۳-۲) برای هر $0 \leq i \leq 5$ قرار بده: $a[i] = c[i]$

(۳-۳) برای هر $0 \leq i \leq 5$ قرار بده: $c[i] = b[a[i]]$

(۳-۴) برای هر $0 \leq i \leq 5$ قرار بده: $b[i] = c[i]$

(۴) مقدار $a[1]$ را چاپ کن.

(۵) پایان

اگر ورودی برنامه $n = 1373$ باشد، خروجی برنامه چند است؟

چهارمین المپیاد ملی کامپیوتر ایران

مسأله ۷

نمره ۱۵

یک صفحه شطرنجی 4×4 با دو خانه A و B مطابق شکل زیر داده شده است. یک ربات می‌خواهد طبق شرایط زیر از A به B برود:

(۱) ربات در هر مرحله فقط می‌تواند از یک خانه به یکی از خانه‌های مجاورش (در یکی از جهتهای افقی، عمودی و یا مورب) برود.

(۲) ربات پس از هر حرکت باید جهت حرکتش در مرحله بعد را عوض کند.

(۳) ربات در مسیر حرکتش از A به B باید به هر یک از خانه‌ها دقیقاً یک بار برسد.

به عنوان مثال شکل زیر یک مسیر برای رسیدن از A به B در یک صفحه شطرنجی 3×3 را نشان می‌دهد.

یک مسیر برای رسیدن از A به B در صفحه شطرنجی 4×4 زیر پیدا کرده، شکل آن را در برگه پاسخنامه رسم کنید.

