به نام خدا
وزارت آموزش و پرورش
مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان و دانش پژوهان جوان

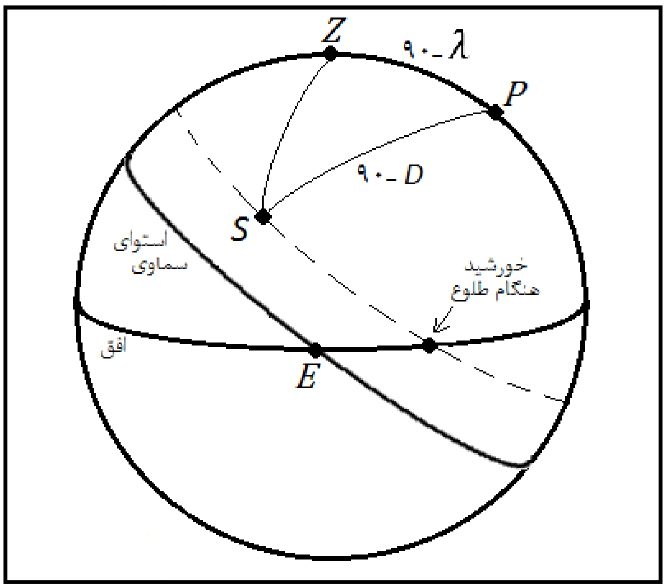
پاسخنامه‌ی تشریحی

آزمون مرحله‌ی دوم نهمین المپیاد نجوم و اخترفیزیک

سوال اول : (ماه مبارک رمضان)

الف) در 19 تیرماه، 112 روز از اعتدال بهاری گذشته است. با توجه به رابطه‌ی داده شده میل خورشید بدست می آید.

$$D = A \sin\frac{2\pi t}{p} = 23.5 \times \sin\left(\frac{2\pi\times 112}{365.25}\right) = 22.0^\circ$$



از رابطه ی کسینوس ها برای مثلث کروی ZPS داریم :

$$\cos(ZS) = \sin\lambda \sin D + \cos\lambda \cos D \cos(Z\widehat{P}S)$$

در هنگام طلوع خورشید روی افق می باشد $(ZS = 90^\circ)$ در نتیجه:

$$\cos(Z\widehat{P}S) = -\tan\lambda \tan D \ , \ \lambda = 35.7^\circ \ \Rightarrow \ Z\widehat{P}S = 7^{h}8^{m}$$

چون فرض شده است ظهر شرعی در ساعت 12 به زمان رسمی کشور است بنابر این می توان نوشت:

$$\text{زمان طلوع خورشید} = 12 - Z\widehat{P}S + 1 = \boxed{5^{h}52^{m}}$$

ب) در هنگام اذان صبح $ZS_1 = 90° + 22° = 112°$ و در هنگام اذان مغرب $ZS_2 = 90° + 5° = 95°$ می باشد.

برای اذان صبح : $Z\widehat{P}S_1 = 9^{\mathrm{h}}28^{m}$

برای اذان مغرب : $Z\widehat{P}S_2 = 7^{\mathrm{h}}36^{m}$

طول روز روزه داران $= Z\widehat{P}S_1 + Z\widehat{P}S_1 = \boxed{17^{\mathrm{h}}4^{m}}$

ج) عرض جغرافیایی شهر زنجان با تهران یکی است پس اختلاف زاویه فقط ناشی از طول جغرافیایی است که برابر است با $51.4° - 48.3° = 3.1°$ که معادل $12^{\mathrm{m}}24^{s}$ است.

طلوع خورشید در زنجان $= 5^{\mathrm{h}}52^{m} + 12^{\mathrm{m}} = \boxed{6^{\mathrm{h}}4^{m}}$

د) چون طول جغرافیایی شهر اصفهان با تهران یکی است پس اختلاف زاویه فقط ناشی از عرض جغرافیایی است که برابر است با $\Delta\lambda = 32.2° - 35.7° = -3.5°$. اختلاف زمان طلوع با تهران برابر اختلاف زاویه ی $Z\widehat{P}S$ در دو محل است.

روش اول: می توان $Z\widehat{P}S$ در هنگام طلوع خورشید رابرای اصفهان محاسبه کرد.

$$\cos(Z\widehat{P}S) = -\tan\lambda\tan D \ , \ \lambda = 32.2° \ \Rightarrow \ Z\widehat{P}S_{\text{اصفهان}} = 6^{\mathrm{h}}59^{m}$$

$$\Delta\big(Z\widehat{P}S\big) = Z\widehat{P}S_{\text{اصفهان}} - Z\widehat{P}S_{\text{تهران}} = 6^{\mathrm{h}}59^{m} - 7^{\mathrm{h}}8^{m} = -9^{\mathrm{m}}$$

روش دوم :

$$\Delta\big(Z\widehat{P}S\big) = \frac{\tan D\,(1+\tan^2\lambda)}{\sin(Z\widehat{P}S)}\,\Delta\lambda = \frac{\tan 22.0°\,(1+\tan^2 35.7°)}{\sin(107°)} = -2.2° \simeq -9^{\mathrm{m}}$$

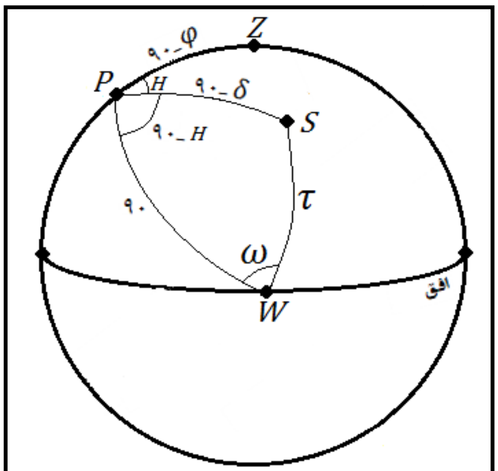
طلوع خورشید در اصفهان $= 5^{\mathrm{h}}52^{m} - \Delta\big(Z\widehat{P}S\big) = \boxed{6^{\mathrm{h}}1^{m}}$

سوال دوم : (ساعت آفتابی)

الف) همان طور که Z (سمت الرأس) قطب صفحه‌ی افق می‌باشد، W (نقطه‌ی غرب افق) نیز قطب صفحه‌ی دیوار می‌باشد. برای حل این سوال دو زاویه تعریف می‌کنیم که مشابه سمت وفاصله‌ی سمت الرأسی هستند، با این تفاوت که گویی افق را سطح دیوار در نظر گرفته‌ایم:

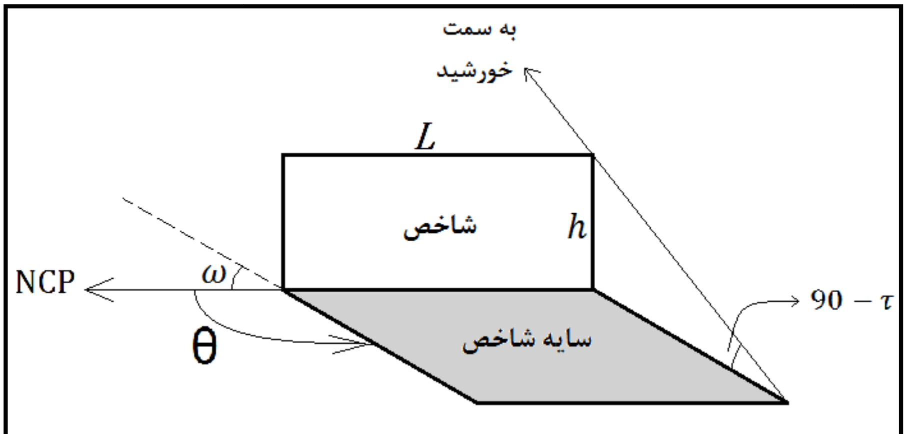
τ: فاصله‌ی زاویه‌ای بین خورشید و W

ω: زاویه‌ی کروی خورشید-P-W



شکل ۱

شکل 2 موقعیت شاخص و سایه‌ی آن را نشان می‌دهد.با توجه به این شکل، ارتفاع سایه‌ی متوازی الاضلاع شکل عبارت است از: $X = h\tan(\tau)\sin(\omega)$

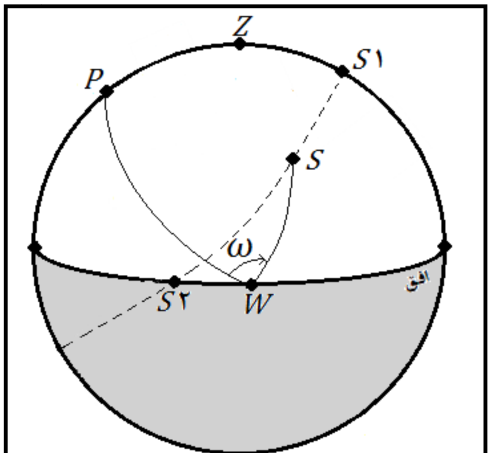


شکل ۲

با استفاده از فرمول چهارجزئی در مثلث کروی PWS (شکل 1) داریم:

$$\cos(\omega)\cos(90°) = \sin(90°)\cot(\tau) - \sin(\omega)\cot(90° - H)$$
$$\Rightarrow \tan(\tau)\sin(\omega) = \cot(H) \Rightarrow \boxed{X = h\cot(H)}$$

ب) با توجه به شکل 2، رابطه‌ی بین θ و ω عبارت است از: $\theta = 180° - \omega$. بنابرین بیشترین و کمترین مقدار زاویه‌ی θ را می‌توان با بررسی تغییرات ω به دست آورد. در شکل زیر مسیر خورشید به صورت خط‌چین مشخص شده، و مکان خورشید در یک لحظه‌ی دلخواه در آسمان (S)نشان داده شده است. واضح است که بیشترین مقدار ω مربوط به زمانی است که خورشید در حال عبور بالایی است $(S1)$ و کمترین مقدار ω مربوط به زمانی است که خورشید غروب می‌کند$(S2)$.توجه کنید که این ساعت آفتابی فقط در این بازه‌ی زمانی قابل استفاده است.



شکل ۳

از آنجایی که W قطب دایره‌ی عظیمه‌ی گذرنده از نقاط P و Z است، داریم:

$$\omega_{max} = \widehat{PS_1} = 90° - \delta = 68.6° \quad \Rightarrow \theta_{min} = 180° - \omega_{max} \Rightarrow \boxed{\theta_{min} = 111.4°}$$

$$\omega_{min} = -\widehat{PS_2} = -\varphi = -35.7° \quad \Rightarrow \theta_{max} = 180° - \omega_{min} \quad \Rightarrow \boxed{\theta_{max} = 215.7°}$$

توجه: مطمئناً این راه حل، تنها راه حل سوال نمی‌باشد و روش‌های مختلفی وجود دارد که به جواب صحیح ختم می‌شوند.

سوال سوم : (کمربند کوییپر)

الف) اگر از حرکت زمین صرفنظر کنیم ، حرکت ظاهری KBO ناشی از دوران KBO خواهد بود :

$$\frac{G\, M_{\odot}\, m}{R^2} = \frac{m\, V^2}{R} \Rightarrow V = \sqrt{\frac{G\, M_{\odot}}{R}}$$

با دانستن اینکه فاصله ی KBO از زمین برابر $R = 39\ (AU)$ است.

$$1\ \ Au = 150 \times 10^{11} (Cm) = 1.5 \times 10^{11} (m) = 150 \times 10^{9}\ (m)$$

$$1\ yr = 365.25 \times 24 \times 3600\ (s) = 3.15 \times 10^{7} (s)$$

$$G = 6.67 \times 10^{-11}\ (\frac{N\ m^2}{kg^2}), \quad M_{\odot} \cong 2 \times 10^{30}\ (kg)$$

$$R = 39 \times 150 \times 10^{9}\ (m)$$

$$V = \sqrt{\frac{6.67 \times 10^{-11} \times 2 \times 10^{30}}{39 \times 150 \times 10^{9}}} = 0.04775 \times 10^{5} \left(\frac{m}{s}\right) = 4.7 \times 10^{5} \left(\frac{Cm}{s}\right)$$

$$V = 4.7 \times 10^{5} \left(\frac{Cm}{s}\right) \times \frac{3.156 \times 10^{7} \left(\frac{s}{yr}\right)}{= \ 150 \times 10^{11} \left(\frac{Cm}{AU}\right)} = 0.098 \times 10^{1} = 0.98\ (\frac{AU}{yr})$$

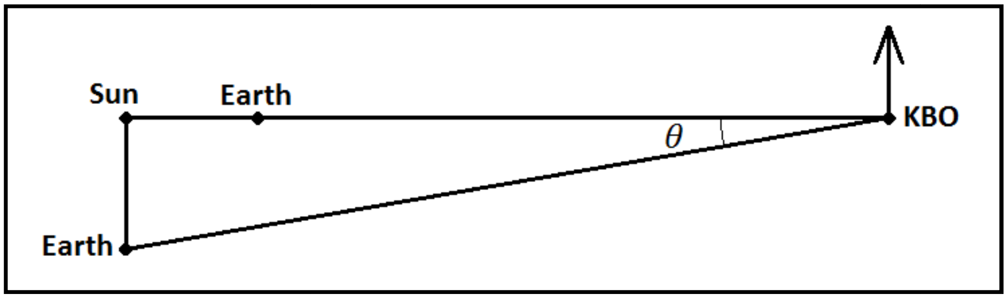
$$\omega = \frac{V}{R} = \frac{4.72 \times 10^{5} \left(\frac{Cm}{s}\right)}{39 \times 150 \times 10^{11} (Cm)} \times \frac{3600\ (s)}{1\ (hr)} = 2.89 \times 10^{-6} \left(\frac{rad}{hr}\right) = 0.59615\ \ arcsec.\, hr^{-1}$$

اگر به جای $R = 40\ (Au)$ قرار دهیم:

$$V = 0.04715 \times 10^{5} \left(\frac{m}{s}\right) = 0.099\ (\frac{AU}{yr}) \omega = 2.9 \times 10^{-6} \left(\frac{rad}{hr}\right)$$

$$\boxed{\omega = 0.598485\ \ arcsec.\, hr^{-1}}$$

ب) اکنون از حرکت KBO صرفنظر می کنیم :



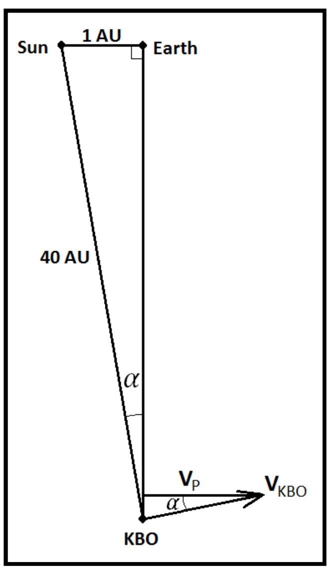
$$\tan(\theta) \cong \theta = \frac{1\ (\text{Au})}{40(\text{Au})} = 0.0256\ (\text{rad})$$

یعنی هر $\frac{1}{4}$ سال حدود 0.0256 رادیان حرکت پارالاکسی ناشی از دوران زمین خواهیم دید (برای KBO)

$$\omega = \frac{0.0256\ (\text{rad})}{0.25\ (\text{yr})} \times \frac{206265''}{1\ \text{rad}} \times \frac{1\ (\text{yr})}{365\ (\text{days})} \times \frac{1\ (\text{day})}{24\ (\text{h})}$$

$$\boxed{\omega = 2.40948\ \text{arcsec.hr}^{-1}}$$

بنابراین حرکت پارالاکسی مهمتر از حرکت دورانی KBO است.



ج) در حالت تربیع زاویه ی خورشید – زمین – KBO قائمه است ، یعنی در این حالت سرعت زمین کاملاً در راستای KBO است و معنی آن این است که سرعت ناشی از پارالاکس در حالت تربیع هیچ نقشی ندارد. بنابراین حرکت ظاهری (appeerent) فقط ناشی از proper motion می باشد.

V_{KBO} سرعت مداری حرکت KBO است.

سرعت KBO در راستای دید ما مولّفه ای دارد. مولّفه ای هم عمود بر راستای دید دارد. در اینجا مجهول مسئله V_p است، سرعتی که راصد در حالت تربیع به عنوان حرکت ظاهری اندازه گیری می کند.

چون α کوچک است: $\cos(\alpha) \cong 1 \quad \rightarrow \cos(\alpha) = \frac{V_p}{V_{KBo}} = 0.999687$

$$\boxed{\omega = 0.58\ \text{arcsec.hr}^{-1}}$$

سوال چهارم : (تابندگی کهکشان)

فاصله تابندگی (Luminosity distance) که بر اساس آن قدر مطلق کهکشانها در این فواصل بدست می آید متناسب با عکس ثابت هابل است. $d_L \propto \frac{cz}{H_0}$

مدول فاصله برابر است با: $\mu = m - M = 5\log d_L - 5$

با توجه به اینکه قدر ظاهری از نگاه دو منجم تغییری نمی کند اختلاف در قدر مطلق با فرض ثابت هابل 70 و 50 کیلومتر بر ثانیه بر مگاپارسک برابر خواهد بود با: $M_{70} = M_{50} + 5\log(\frac{70}{50})$

قدر $B = -21.5$ و رنگ $B - R = 1.5$ است پس قدر مطلق در باند R از نگاه منجم اول $M_{R,50} = -23$ است.

قدر مطلق خورشید در این باند 4.45 خواهد بود چون رنگ خورشید 1.00 داده شده است و در نتیجه :

$$M_{R,70} = -23.0 + 0.73$$

$$\log\frac{L_{R,70}}{L_{R\odot}} = -\frac{M_{R,70} - M_\odot}{2.5}$$

$$\frac{L_{R,70}}{L_{R\odot}} = 10^{11.27} \times 1.1$$

که در آن افزایش تابندگی 10 درصدی با ضریب 1.1 منظور شده است و مقدار نهایی برابر است با:

$$\boxed{\frac{L_{R,70}}{L_{R\odot}} = 2.05 \times 10^{11}}$$

شیب رابطه بین تابندگی ایکس و باند B تغییری نمی کند چون ضریب مربوط به تغییر ثابت هابل برای باند ایکس و مرئی یکسان است.

سوال پنجم : (خوشه ی ستاره ای)

الف) $M_x = 0.5\,M_{sun} \Rightarrow L_x = \frac{1}{8}L_{sun}$

$$M_y = 5M_{sun} \Rightarrow L_y = 125L_{sun}$$

$$\frac{M}{L} = \frac{N_xM_x + N_yM_y}{N_xL_x + N_yL_y} = \frac{\frac{N_x}{2} + 5N_y}{\frac{N_x}{8} + 125N_y} = 2 \Rightarrow \frac{N_x}{N_y} \to \sim 1000$$

ب) $\frac{L_x^{total}}{L_y^{total}} = \frac{L_x N_x}{L_y N_y} = \frac{\frac{1}{8}}{125} \times 1000 = 1$

ج) $N_x = CM_x^{-\alpha} \; , N_y = CM_y^{-\alpha} \Rightarrow \frac{N_x}{N_y} = (\frac{m_x}{m_y})^{-\alpha} = 1000 \Rightarrow (\frac{1}{10})^{-\alpha} = 1000 \Rightarrow \alpha = 3$

سوال ششم : (ساختار کروی)

الف) $E_g = -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R} \, , E_{KE} = \frac{3}{2}NkT = \frac{3}{2}\frac{M}{m}kT$

m جرم متوسط ذرات است. شرط رمبش:

$$|E_g| > E_{KE} \Rightarrow \frac{3}{5}G\frac{M^2}{R} > \frac{3}{2}\frac{M}{m}kT \Rightarrow \frac{1}{5}G\frac{M}{R} > \frac{1}{2}\frac{kT}{m} \Rightarrow R < \frac{2GMm}{5kT} \Rightarrow \frac{3M}{4\pi\rho} < (\frac{2GMm}{5kT})^3 \Rightarrow$$

$$\rho_c > \frac{3}{4\pi M^2}(\frac{5kT}{2Gm})^3$$

$k = 1.38 \times 10^{-23} \, , m = 2m_H = 2(1.67 \times 10^{-27}) = 2.34 \times 10^{-27} kg \, , G = 6.67 \times 10^{-11}$

$\boxed{\rho_c \approx 5 \times 10^{-15} kgm^{-3}}$

ب) $\frac{M}{2m_H}\epsilon_{decomposition} + \frac{M}{m_H}\epsilon_{ionization} = \frac{3}{5}(\frac{GM^2}{R_2} - \frac{GM^2}{R_1})$

مقدار R_1 را می‌توان از قسمت الف برآورد کرد:

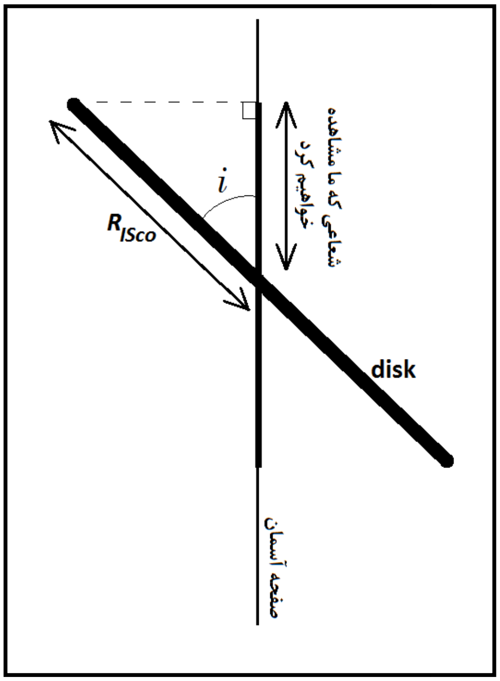
$R_1^3 = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi\rho_c} \Rightarrow R_1 \sim 10^{-4} pc \gg R_2$

$2 \times 10^{39} J \cong \frac{3}{5}\frac{GM^2}{R_2} \Rightarrow \boxed{R_2 \cong 8 \times 10^{10} m = 2 \times 10^{-6} pc}$

ج) در حالت تعادل هیدرواستاتیک داریم: $E_g - 2E_{KE} = 0$

$E_g = -2 \times 10^{39} J \; , \qquad E_{KE} = \frac{3}{2}N'kT - 12\frac{N}{2}kT = 3\frac{M}{m_H}kT \Rightarrow \boxed{T = 20000K}$

سوال هفتم : (قرص برافزایشی)



الف) فرض کنید مسیر ذرات قرص بطور ذاتی دایره ای باشد. اگر قرص نسبت به صفحه ی آسمان انحراف داشته باشد . قرص شبیه بیضی دیده می شود.

با توجّه به شکل خواهیم دید شعاع دیده شدن به مقدار $\cos(i)$ R_{ISco} کاهش می یابد. شار دریافتی روی زمین به صورت زیر است:

$$F = \frac{\text{Luminosity}}{4\,\pi\,d^2} = \frac{1}{2}\frac{2\,\sigma\,T^4(\text{Area})}{4\,\pi\,d^2}$$

مساحت ناحیه ی مورد نظر:

$$\text{Area} = 4\,\pi\,R_{ISco}^2\,\cos(i) - \pi\,R_{ISco}^2\cos(i)$$

تقسیم بر دو به خاطر این است که ناظر زمینی فقط یک طرف قرص را می بیند .

$$F = \frac{3\,\sigma\,T^4 R_{ISco}^2\,\cos\,(i)}{4\,d^2}$$

$$R_{ISco} = \left(\frac{4\,Fd^2}{3\sigma\,T^4\cos\,(i)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\sigma = 5.67\,\times\,10^{-8}\left(\frac{W}{m^2K^4}\right) = 5.67\,\times\,10^{-5}\left(\frac{erg}{cm^2K^4}\right)$$

$$1\ Pc = 3.085 \times 10^{16}(m) = 3.085 \times 10^{18}(cm)$$

$$d = 1\ (kPc)$$

$$R_{ISco} = \frac{2d}{T^2\ \cos(i)}\sqrt{\frac{F}{3\sigma}}$$

ب) می دانیم قانون جابجایی ویلهلم وین چنین است:

$$h\,\nu_{peak} = 5\,k_b\,T$$

$$T = \frac{hc}{5\,k_b\lambda_{rmpeak}} \qquad \Longrightarrow \qquad T = 994002^{\circ}K = 9.94 \times 10^{5\ \circ}\ K$$

$$k_b = 1.38\,\times\,10^{-23}\left(\frac{J}{K}\right)$$

$\lambda_{rmpeak} = 2.9\ (\mathrm{nm})$

$h = 6.626 \times 10^{-34} (\mathrm{J\ s})$

$T = \frac{6.626\times10^{-34}\ \times3\times10^{8}}{5\times1.38\times10^{-23}\times2.9\times10^{-9}} = 9.9 \times 10^{5}\quad {}^{\circ}\mathrm{K}$

اگر همه ی این اعداد را در رابطه ی R_{ISco} بگذاریم خواهیم داشت : $R_{ISco} = 15.8\ \ \mathrm{km}$

$$R_{ISco} = \frac{2\times3.085\times10^{19}}{(9.9\times10^{5})^{2}\ \times\cos(80)} \times \sqrt{\frac{2\times10^{-12}}{3\times5.67\times10^{-8}}}$$

$$\boxed{R_{ISco} = 15.8\ (\mathrm{Km})}$$

ج) برای این سیاهچاله $R_G = \frac{G\,M}{c^2} = \frac{6.67\times10^{-11}\ \ (\frac{N\ m^2}{kg^2})\times2\times10^{31}\ (kg)}{(3\times10^{8}(\frac{m}{s}))^{2}} = 14.82 \times 10^{3}(\mathrm{m}) = 14.82(\mathrm{km})$

است و $R_{ISco} = \ 15.8\ (\mathrm{Km})$ و $\frac{R_{ISco}}{R_G} = \frac{15.8}{14.82} = 1.07$ و درنتیجه $\boxed{R_{ISco} = \ 1.07R_G}$

به نظر می رسد که در این سیستم سیاهچاله اسپین نزدیک به ماکزیمم مقدار را دارا است .

د) می دانیم که $L = \frac{G\,M\,\dot{M}}{2\,R_{ISco}}$ و در ضمن $L = 2\sigma T^4\ \ (3\ \pi\ \ R_{ISco}^2)$ از تساوی این دو رابطه خواهیم داشت:

$$2\sigma T^4(3\ \pi\ \ R_{ISco}^2) = \frac{G\,M\,\dot{M}}{2\,R_{ISco}} \qquad \Rightarrow \qquad \dot{M} = \frac{12\ \pi\ \sigma\ T^4 R_{ISco}^3}{G\,M}$$

$$\dot{M} = \frac{12\times3.14\times5.67\times10^{-8}\times\left(9.993\times10^{5}\right)^{4}\times\left(15.8\times10^{3}\right)^{3}}{6.67\times10^{-11}\ \ \times2\times10^{31}}\left(\frac{kg}{s}\right)$$

$$1\,\frac{kg}{s} = \frac{365.25\times24\times3600}{2\times10^{30}}\left(\frac{M_{\odot}}{yr}\right) = \frac{3.15\times10^{7}}{2\times10^{30}}\left(\frac{M_{\odot}}{yr}\right) = 1.57 \times 10^{-23}\left(\frac{M_{\odot}}{yr}\right)$$

$$\boxed{\dot{M} = 9.7\ \times 10^{-14}\left(\frac{M_{\odot}}{yr}\right)}$$